



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ  
11.02.2012

BAREM CLASA a VIII-a

1. a) Din  $a^{11} \in \mathbb{Q}$  rezultă  $(a^{11})^5 \in \mathbb{Q}$  deci  $a^{55} \in \mathbb{Q}$  (1p).  
Din  $a^{18} \in \mathbb{Q}$  rezultă  $(a^{18})^3 \in \mathbb{Q}$  deci  $a^{54} \in \mathbb{Q}$  (1p).  
În concluzie  $a^{55} : a^{54} \in \mathbb{Q}$ , deci  $a \in \mathbb{Q}$ . (1p)  
b) După ridicarea la pătrat se obține  $a^2 + 3b^2 + c^2 + 3d^2 = 1$  și  $2ab + 2cd = 1$ . (1p)  
Justificare (1p)  
Prin scăderea celor două relații se obține  $(a - b)^2 + (c - d)^2 + 2b^2 + 2d^2 = 0$ . (1p)  
Deci  $a = b$ ,  $c = d$ ,  $b = d = 0 = a = c$ .  
În aceste condiții însă relația nu este adevărată, deci rezultă concluzia. (1p)
2. Notăm  $-a + b + c + d = x$ ,  $a - b + c + d = y$ ,  $a + b - c + d = z$ ,  $a + b + c - d = t$ . (1p)  
Prin adunarea relațiilor rezultă  $x + y + z + t = 2(a + b + c + d)$ . (1p)  
Inegalitatea devine  $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 1 \geq x + y + z + t$  (1p) ceea ce este echivalent cu  
$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$$
 (2p)  
Egalitatea are loc dacă  $x = y = z = t = \frac{1}{2}$  adică  $a = b = c = d = \frac{1}{4}$ . (2p)
3. a) Folosind proprietățile liniilor mijlocii se arată că MNPQ este paralelogram. (1p)  
Deci diagonalele [NQ] și [MP] se intersectează într-un punct O. (1p)  
Planele (APB) și (CDM) conțin pe [MP], deci pe O, iar planele (BCQ) și (DAN) conțin pe [NQ] deci pe O. (1p)  
Ca urmare toate planele au punctul O comun. (1p)  
b) MNPQ dreptunghi  $\Rightarrow MN \perp NP$  (1p)  
Dreptele MN și NP fiind paralele cu AC respectiv BD rezultă  $AC \perp BD$ . (1p)  
În concluzie măsura unghiului celor două drepte este 90 de grade. (1p)
4. a) Fie O centrul pătratului ABCD.  
 $m(\angle(EAC), (ABC)) = m(\angle(EOB))$ . Justificare. (1p)  
 $tg \angle(EOB) = 2\sqrt{2}$  (1p)  
b) Construim  $AG \perp (ABC)$ ,  $AG = x$

**Notă :**

- toate subiectele sunt obligatorii
- timp de lucru 3 h
- fiecare problemă se notează cu puncte întregi de la 0 la 7



MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII,  
TINERETULUI ȘI SPORTULUI

SOCIETATEA DE ȘTIINTE MATEMATICE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN BIHOR



---

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ  
11.02.2012

Se demonstrează că BG este paralelă cu CF, deci este suficient să arătăm că dreptele AE și BG sunt perpendiculare. (1p)

Deoarece  $\frac{AG}{AB} = \frac{AB}{BE} = \frac{1}{2}$  rezultă că triunghiurile dreptunghice AGB și BAE sunt asemenea, deci

AE  $\perp$  BG, adică AE  $\perp$  CF. (1p)

c) Distanța căutată este EM unde EM  $\perp$  OF, M  $\in$  OF. Justificare. (1p)

Calculul distanței EM =  $\frac{5x\sqrt{6}}{3}$ . (Se poate scrie aria trapezului BDFE ca suma ariilor a 3 triunghiuri) (2p)

---

**Notă :**

- toate subiectele sunt obligatorii
- timp de lucru 3 h
- fiecare problemă se notează cu puncte întregi de la 0 la 7