



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ
11.02.2012

BAREM CLASA a XII-a

Problema 1. $\int \ln(\operatorname{tg} x) dx = x \ln(\operatorname{tg} x) - \int \frac{2x}{\sin 2x} dx$

.....(2p)

Considerăm $g: [0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ $g(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\sin 2x}, & x \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ care este continuă deci admite o primitivă

G.....(2p)

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(\operatorname{tg} x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(\operatorname{tg} x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x \cdot \operatorname{tg} x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{-x^2}{\frac{1}{2} \sin 2x} = 0$$

.....(2p)

Rezultă $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} F(x) = -G(0) + c$

$\in \mathbb{R}$(1p)

Problema 2. Se înlocuiește x cu $\frac{1-x}{1+x} \Rightarrow F(\frac{1-x}{1+x}) = f(\frac{1-x}{1+x}) \cdot f(x) \Rightarrow$

$$F(x) = F(\frac{1-x}{1+x}) \dots (2p)$$

$$x=0$$

$$\Rightarrow F(0) = F(1) \dots (2p)$$

Se aplică teorema lui Rolle $\Rightarrow (\exists) c \in (0, 1)$ a.î. $F'(c) = 0 \Rightarrow$

$$f(c) = 0 \dots (2p)$$

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^* \Rightarrow f(x) \neq 0 \quad (\forall) x \in [0, 1] \Rightarrow$$

contradicție.....(1p)

Problema 3. f endomorfism $\Rightarrow f(xy) = f(x)f(y), \forall x, y \in G \Rightarrow xyxy = xxyy$

$$\forall x, y \in G \Rightarrow xy = yx, \forall x, y \in G \Rightarrow (G, \cdot)$$

comutativ.....(2p)

$$\text{Pentru } e \in G \Rightarrow e^{r^0} = e \Rightarrow e \in G_r \Rightarrow G_r \neq \emptyset$$

.....(1p)

Notă :

- toate subiectele sunt obligatorii
- timp de lucru 3 h
- fiecare problemă se notează cu puncte întregi de la 0 la 7



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ
11.02.2012

$$x, y \in G_r \Rightarrow \exists m, n \in \mathbb{N} \text{ a.î. } x^{r^m} = y^{r^n} = e \Rightarrow (xy)^{r^{m+n}} = e \Rightarrow y \in G_r$$

.....(2p)

$$\text{Dacă } x^{-1} \text{ este simetricul lui } x \text{ în } G \Rightarrow (x^{-1})^{r^m} = (x^{r^m})^{-1} = e^{-1} = e \Rightarrow x^{-1} \in G_r \text{ (2p)}$$

Problema 4. a) Din condiția de asociativitate obținem

$$a=1 \text{(2p)}$$

b) i) f-

bijectivă.....
.....(1p)

$$\text{ii) } f(x*y)=f(x)f(y),$$

$$\forall x, y \in G \text{(1p)}$$

Concluzie.....
..... (0,5p)

$$\text{c) Fie } x = \frac{1}{7} * \frac{1}{17} * \dots * \frac{1}{2n^2-1}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

$$f(x) = \prod_{k=2}^n \frac{k^2-1}{k^2}$$

.....(2p)

$$x = f^{-1}\left(\prod_{k=2}^n \frac{k^2-1}{k^2}\right)$$

.....(0,5p)

Notă :

- toate subiectele sunt obligatorii
- timp de lucru 3 h
- fiecare problemă se notează cu puncte întregi de la 0 la 7