



Concursul Național de Matematică Aplicată „ADOLF HAIMOVICI”

Etapă locală – 09 februarie 2013

Clasa a XII-a

1. Tekintsük a $G = (3, +\infty)$ csoportot, melynek művelete $x * y = xy - 3x - 3y + 12$.

a) Határozd meg az a és b valós számokat úgy, hogy az $f: \mathbf{R}^* \rightarrow G$, $f(x) = ax + b$ függvény legyen izomorfizmus a (\mathbf{R}_+^*, \cdot) és $(G, *)$ csoportok között.

b) Számítsd ki $x^{(n)} = x * x * x * \dots * x$, ahol x n -szer van összetéve.

c) Határozd meg azt a nullától különböző n természetes számot amelyre: $\underbrace{4 * 4 * 4 * \dots * 4}_{n\text{-szer}} = 2n + 2$.

2. Adott a következő függvény $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{6}{x^2 - 4} + \frac{1}{x}, & x < 1 \\ \frac{2}{x^2} + 2\sqrt{x} - 6, & x \geq 1 \end{cases}$. Igazold, hogy a

függvénynek vannak primitív függvényei a $(0, \infty)$ intervallumon és határozd meg azt a primitív függvényt amelynek grafikus képe átmegy az $A\left(1, \frac{4}{3}\right)$ ponton.

3. Adott a következő halmaz $G = \left\{ X \in M_2(\mathbf{Z}_3) \mid X = \begin{pmatrix} a & \hat{2}b \\ b & a \end{pmatrix} \right\}$.

a) Igazold, hogy a $H = G - \{O_2\}$ halmaz a mátrixok szorzásával csoportot alkot.

b) Határozd meg az $X^2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $X \in G$ egyenlet megoldásainak számát.

4. Adottak a következő függvények $f, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ és $g(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

a) Igazold, hogy f függvény a g függvény egy primitív függvénye.

b) Számítsd ki $\int \frac{g(x)}{f(x)} dx, x \in \mathbf{R}$.

Notă: a) Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
b) Toate problemele sunt obligatorii.
c) Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.