

BAREM

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ – 08.02.2025

Clasa a IX-a

Secțiunea H2

Filiera teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii

1.a) Determinați două numere naturale $x \in \mathbf{N}^*$ și \overline{abc} astfel încât numărul $\sqrt{(\overline{abc} + \overline{cab} + \overline{bca})x}$ să fie rațional, iar x să fie cel mai mic număr posibil.

b) Calculați $1 - \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{2009 \cdot 2010} - \frac{2009}{2010} \right|$.

Barem

a) $(\overline{abc} + \overline{cab} + \overline{bca})x = 111(a + b + c)x = 3 \cdot 37(a + b + c)x$ (1p)

De aici $a+b+c=3$. Cum a, b, c sunt nenule $\Rightarrow a = b = c = 1$ (1p) și $x=37$. (1p)

b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{2009 \cdot 2010} - \frac{2009}{2010} = \frac{2-1}{2} + \frac{3-2}{6} + \frac{4-3}{12} + \dots + \frac{2010-2009}{2009 \cdot 2010} - \frac{2009}{2010} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2009} + \frac{1}{2009} - \frac{2009}{2010} = 0$ (3p)

Deci $1 - \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{2009 \cdot 2010} - \frac{2009}{2010} \right| = 1$ (1p)

2. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir pentru care $x_0 = 1$ iar $2x_{n+1} = x_n + 2$, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$.

a) Arătați că șirul $(b_n)_{n \geq 1}$ definit prin $b_n = x_n - x_{n-1}$, oricare ar fi n natural nenul, este o progresie geometrică.

b) Determinați formula termenului general al șirului $(x_n)_{n \geq 0}$.

Barem

a) $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x_{n-1}} = \frac{(\frac{1}{2}x_n + 1) - (\frac{1}{2}x_{n-1} + 1)}{x_n - x_{n-1}} = \frac{1}{2}, \forall n \geq 1$. Deci șirul e progresie aritmetică. (3p)

b) Cum $b_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow b_n = \frac{1}{2^n}, \forall n \geq 1$. (2p)

Atunci $x_n = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + (x_2 - x_1) + x_1 = b_n + b_{n-1} + b_{n-2} + \dots + b_2 + \frac{3}{2} = 2 - \frac{1}{2^n}$ (2p)

3. Calculați $\left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2025^2} \right]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului x .

Barem

$$\sum_{k=1}^{2025} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{2025} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{2025} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1 + 1 - \frac{1}{2025} < 2 \quad (1) \quad (5p)$$

$$\sum_{k=1}^{2025} \frac{1}{k^2} > 1 (2) \quad (1p)$$

$$\text{Din cele două relații avem } \left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2025^2} \right] = 1 \quad (1p)$$

4. Dacă M este punctul de intersecție a dreptelor care unesc mijloacele laturilor opuse ale unui patrulater ABCD, arătați că pentru orice punct O din planul patrulaterului avem $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OM}$.

Barem

Fie X, Y, Z, T mijloacele laturilor patrulaterului \Rightarrow XYZT este paralelogram (2p), iar M este mijlocul diagonalelor XZ și TY. (1p)

$$2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OZ}, 2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OY} + \overrightarrow{OT} \Rightarrow 4\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY} + \overrightarrow{OZ} + \overrightarrow{OT} \quad (2p)$$

$$\overrightarrow{OX} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}, \overrightarrow{OY} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2}, \overrightarrow{OZ} = \frac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{2}, \overrightarrow{OT} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}}{2}$$

$$\text{Deci } 4\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} \quad (2p).$$