

## BAREM

## CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ – 08.02.2025

Clasa a XI-a

## Secțiunea H2

## Filiera teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii

1. Fie matricea  $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ .a) Determinați  $a$  și  $b$  numere reale astfel încât:  $A^2 = a \cdot A + b \cdot I_2$ b) Demonstrați ca:  $A^n = nA + (1 - n)I_2$ ,  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ c) Să se arate că suma elementelor matricei:  $A + A + \dots + A^n$  este număr par, oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ 

## Barem

1. a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} \dots\dots\dots 1p$$

$$\begin{cases} 4a + b = 7 \\ -3a = -6 \\ 3a = 6 \\ -2a + b = -5 \end{cases} \dots\dots\dots 1p$$

$$a = 2 \text{ și } b = -1 \dots\dots\dots 1p$$

b) demonstrarea prin inducție sau alta metodă

$$P(n+1): A^{n+1} = (n+1)A + (1-n)I_2 = (n+1)A - nI_2 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Din } A^{n+1} = A^n \cdot A = (nA + (1-n)I_2) \cdot A = nA^2 + (1-n)A = n(2A - I_2) + (1-n)A = A(2n + 1 - n) - nI_2 = (n+1)A - nI_2 \text{ q.e.d.}$$

$$\dots\dots\dots 2p$$

$$c) S = 2n \text{ număr par} \dots\dots\dots 1p$$

$$2. a) \text{ Calculați, scriind sub forma de produs determinantul: } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

$$b) \text{ Rezolvați pe mulțimea numerelor reale ecuația: } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4^x & 4 & 16 \\ 8^x & 8 & 64 \end{vmatrix} = 0$$

## Barem

$$a) \Delta = (b - a)(c - a)(c - b)(ab + ac + bc) \dots\dots\dots 4p$$

b) aplicând punctul a) cu  $a = 2^x$ ,  $b = 2$  și  $c = 4$  ecuația devine:

$2(2 - 2^x)(4 - 2^x)(2^{x+1} + 2^{x+2} + 8) = 0$  cu soluțiile  $x=1$  și  $x=2$  .....3p

3. Calculați:

- a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x + \tan x}$   
 b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$   
 c)  $\lim_{x \rightarrow 0} (3^x + x)^{\frac{1}{\sin x}}$

**Barem**

- a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 - \frac{\tan x}{x})}{x(1 + \frac{\tan x}{x})} = \frac{1-1}{1+1} = 0$  ..... 1p  
 b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(1 - \frac{\sin x}{x})}{x(1 + \frac{\sin x}{x})} = \frac{1-0}{1+0} = 1$  ..... 2p  
 c)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + (3^x + x - 1))^{\frac{1}{3^x + x - 1} \cdot \frac{3^x + x - 1}{\sin x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x + x - 1}{\sin x}}$  ..... 1p

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x + x - 1}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3^x - 1) + x}{x} \cdot \frac{x}{\sin x} = 1 + \ln 3 \text{ ..... 2p}$$

$$\text{Finalizare } \lim_{x \rightarrow 0} (3^x + x)^{\frac{1}{\sin x}} = 3e \text{ ..... 1p}$$

4. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 + 2x + 2} - ax - b, & x \geq 0 \\ 3x + c, & x < 0 \end{cases}$

Determinați parametrii  $a, b, c \in \mathbb{R}$  știind că  $f$  este continuă și  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .

**Barem**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left( \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} - a - \frac{b}{x} \right) = 0 \Rightarrow 2 - a = 0 \Rightarrow a = 2 \text{ ..... 2p}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) + (\sqrt{x^2 + 2x + 2} - x) \right) \text{ ..... 1p}$$

$$b = \frac{3}{2} \text{ ..... 2p}$$

$$l_s(0) = l_d(0) = f(0) \Rightarrow c = 1 + \sqrt{2} - b \text{ ..... 1p}$$

$$c = \frac{2\sqrt{2}-1}{2} \text{ ..... 1p}$$