

BAREM

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ – 08.02.2025

Clasa a XII-a

Secțiunea H1

Filiera tehnologică - toate profilurile și specializările

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} 2xe^{x^2} + e^x + 3, & x \geq 0 \\ x^2 + 2x + 4, & x < 0 \end{cases}$

- a) Arătați că f admite primitive pe \mathbb{R}
b) Pentru $x \in [0; \infty)$, calculați o primitivă a funcției $f(x)$, dacă $F(1) = 2e$.

Barem

- a) f continuă pe $(-\infty; 0)$ 1 pct
 f continuă pe $(0; \infty)$ 1 pct
 $l_s(0) = l_a(0) = f(0) = 4$ 1 pct
 f continuă pe \mathbb{R} 1 pct
b) $\int f(x) dx = e^{x^2} + e^x + 3x + c$ 2 pct
 $c = -3$ 1 pct

2. Calculați

a) $\int_{-2}^2 x^{2025} \sqrt{x^2 - 2x + 1} dx$

b) $\int_{-2025}^{2025} \sqrt[3]{x^3 + x} dx$

Barem

- a) $\int_{-2}^2 x^{2025} |x - 1| dx$ 1 pct
 $\int_{-2}^2 x^{2025} |x - 1| dx = \int_{-2}^1 x^{2025} (1 - x) dx + \int_1^2 x^{2025} (x - 1) dx$ 1 pct
Finalizare 2 pct
b) Arată că f impară 2 pct
Din f impară avem $\int_{-2025}^{2025} \sqrt[3]{x^3 + x} dx = 0$ 1 pct

3. Se consideră mulțimea $G = (2; \infty)$, pe care se definește $a \Delta b = ab - 2a - 2b + 6$, cu $a, b \in G$.

- Arătați că pentru orice $a, b \in G$ avem $a \Delta b \in G$.
- Arătați că (G, Δ) este grup abelian.
- Determinați numerele reale $x, y \in G$ astfel încât $\lg x \Delta \lg y = \lg x$.
- Demonstrați că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow (2; \infty)$, $f(x) = 2025^x + 2$ este un izomorfism între grupurile $(\mathbb{R}, +)$ și (G, Δ) .
- Determinați $m, n \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ astfel încât $m \Delta n \in \mathbb{N}$.

Barem

- Verificare.....1 pct
- Verificarea proprietăților2 pct
- $a \Delta b = (a-2)(b-2)+2 \Rightarrow (\lg x-2)(\lg y-2)-(\lg x-2)=0 \Rightarrow (\lg x-2)(\lg y-3)=0$
finalizare.....1 pct
- f bijectivă.....1 pct
Verificare f morfism.....1 pct
- ex $m-2=3/5$ și $n-2=5/3 \Rightarrow m \Delta n = 3$ număr natural.....1 pct

4.

- Pe mulțimea $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ se definește legea de compoziție $x \circ y = \min(x, y)$, pentru orice $x, y \in M$. Alcătuiți tabla operației „ \circ ”, și stabiliți dacă M este parte stabilă în raport cu „ \circ ”.
- Pe mulțimea Z_6 se definește operația algebrică $x * y = 3x + 5y + 4$, oricare ar fi $x, y \in Z_6$.
Alcătuiți tabla operației „ $*$ ” și stabiliți dacă operația dată este asociativă.

Barem

- Alcătuirea tablei operației.....2 pct
 M este parte stabilă în raport cu operația.....1 pct
- Alcătuirea tablei operației2 pct
Verificare asociativitate.....2 pct