

BAREM

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ – 08.02.2025

Clasa a XII-a

Secțiunea H2

Filiera teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii

- 1) Se consideră $G=(0; \infty) \setminus \{1\}$ pe care se definește legea de compoziție $m * n = m^{\frac{\ln n}{2}}$, oricare ar fi $m, n \in G$. Rezolvați ecuația $x * x * x = x$.

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x^2+1} \ln(x^2+1) + e^x + 3, & x \geq 0 \\ x^2 + 2x + 4, & x < 0 \end{cases}$$

- a) Arătați că f admite primitive pe \mathbb{R}
b) Pentru $x \in [0; \infty)$, calculați o primitivă a funcției $f(x)$, dacă $F(1) = \frac{(\ln 2)^2}{2} + e$.

Barem

- 1) Aducerea ecuației la forma $(\frac{\ln x}{2})^2 = 1$1pct
Soluții $x_1 = e^2$, $x_2 = \frac{1}{e^2}$1 pct
2) a) f continuă pe $(-\infty; 0)$. f continuă pe $(0; \infty)$1 pct
 $l_s(0) = l_d(0) = f(0) = 4$, f continuă pe \mathbb{R} , f admite primitive pe \mathbb{R}1 pct
b) $\int f(x) dx = \frac{(\ln(x^2+1))^2}{2} + e^x + 3x + c$2 pct
 $c = -3$1 pct

2. Calculați

- a) $\int_{-2}^2 x^{2025} \sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} dx$
b) $\int_{-2025}^{2025} \sqrt[3]{x^3 + x} dx$

Barem

- a) $\int_{-2}^2 x^{2025} |x^2 - 1| dx$1pct
 $\int_{-2}^2 x^{2025} |x^2 - 1| dx = \int_{-2}^{-1} x^{2025} (x^2 - 1) dx + \int_{-1}^1 x^{2025} (1 - x^2) dx +$
 $+ \int_1^2 x^{2025} (x^2 - 1) dx$ 1 pct
Calcul și finalizare..... 2 pct
b) Arată că f impară2 pct

Din f impară avem $\int_{-2025}^{2025} \sqrt[3]{x^3 + x} dx = 0$1 pct

3. Se consideră mulțimea $G = (2025; \infty)$, pe care se definește $a \Delta b = ab - 2025a - 2025b + 2025^2 + 2025$ cu $a, b \in G$.

- a) Arătați că pentru orice $a, b \in G$ avem $a \Delta b \in G$.
- b) Arătați că (G, Δ) este grup abelian.
- c) Determinați numerele reale $x, y \in G$ astfel încât $\lg x \Delta \lg y = \lg x$
- a) Demonstrați că funcția $f : (2025; \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(x - 2025)$ este un izomorfism între grupurile (G, Δ) și $(\mathbb{R}, +)$.
- b) Determinați $m, n \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ astfel încât $m \Delta n \in \mathbb{N}$

Barem

- a) Verificare.....1pct
- b) Verificarea proprietăților2 pct
- c) $a \Delta b = (a - 2025)(b - 2025) + 2025 \Rightarrow (\lg x - 2025)(\lg y - 2025) - (\lg x - 2025) = 0$
 $\Rightarrow (\lg x - 2025)(\lg y - 2026) = 0$, finalizare.....1 pct
- d) f bijectivă.....1 pct
Verificare f morfism.....1 pct
- e) ex $m - 2025 = 3/5$ și $n - 2025 = 5/3 \Rightarrow m \Delta n = 2026$ număr natural.....1 pct

4. Fie mulțimea $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, pe care se definește legea de compoziție „ \circ ” prin:

$(a, b) \circ (m, n) = (am, an + b)$

- a) Arătați că legea este asociativă
- b) Determinați elementul neutru și elementele simetrizabile.
- c) Aflați două elemente (a, b) și (m, n) din G pentru care $(a, b) \circ (m, n) \neq (m, n) \circ (a, b)$
- d) Determinați $x \in G$, astfel încât $(2^x, 2 \cdot 2^x) \circ (2, 4 \cdot 2^x) = (1, 2)$

Barem

- a) Verificare1 pct
- b) $(1, 0)$ el neutru.....1 pct
 $(1/a, -b/a)$ el simetric.....2 pct
- c) Rezolvarea cerinței.....1 pct
- d) $(2^{x+1}, 4 \cdot 2^{2x} + 2 \cdot 2^x - 2) = (1, 2)$1 pct
Rezolvarea ecuațiilor și alegerea soluției convenabile $x = -1$1 pct