

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ – 08.02.2025

Clasa a XI-a

Secțiunea H1

Filiera tehnologică - toate profilurile și specializările

1. FELADAT

Adott az $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{x} \\ 1 & 0 & 1 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$ mátrix.

- Határozd meg az x valós szám értékét úgy, hogy $\det(A(x))=1$.
- Bizonyítsd be, hogy: $\det(A(x) \cdot A(1) - A(x+1)) > 0$, bármely $x > 0$.
- Mutassátok ki, hogy a $B(n)=A(1^2)+A(2^2)+\dots+A(n^2)$ mátrix determinánsa különbözik nullától bármely n természetes szám esetén, amely nagyobb vagy egyenlő mint 2.

2. FELADAT

Adottak az $A(1,1)$, $B(-1,-2)$, $C(p,q)$ pontok a síkban.

- Ha a C pont rajta van az $x+y-3=0$ egyenletű egyenesen, határozzátok meg a p és q természetes számokat úgy, hogy az ABC háromszög területe a lehető legkisebb legyen. Ebben az esetben határozd meg ezt a területet.
- Számítsd ki a $C(1,2)$ pont távolságát AB egyenestől.

3. FELADAT

Adott az $f: D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-3x}}$ függvény, ahol D a függvény maximális értelmezési tartománya.

- Határozd meg a D halmazt;
- Számítsd ki $\lim_{x \nearrow 0} f(x)$;
- Határozd meg a függvény aszimptotáinak egyenletét.

4. FELADAT

Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1-x)}{x}, & x < 0 \\ a, & x = 0 \\ b \cdot \left(\frac{2x+1}{3x+1}\right)^{\frac{1}{x}}, & x > 0 \end{cases}$ függvény, ahol $a, b \in \mathbb{R}$.

Határozd meg az $a, b \in \mathbb{R}$ értékét úgy, hogy a függvény folytonos legyen.