



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ – 08.02.2025

Clasa a XII-a

Secțiunea H2

Filiera teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii

PROBLEMA 1

- 1) Se consideră $G=(0; \infty) \setminus \{1\}$ pe care se definește legea de compoziție $m * n = m^{\frac{\ln n}{2}}$, oricare ar fi $m, n \in G$. Rezolvați ecuația $x * x * x = x$.
- 2) Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x^2+1} \ln(x^2+1) + e^x + 3, & x \geq 0 \\ x^2 + 2x + 4, & x < 0 \end{cases}$$
- a) Arătați că f admite primitive pe \mathbb{R}
- b) Pentru $x \in [0; \infty)$, calculați o primitivă a funcției $f(x)$, dacă $F(1) = \frac{(\ln 2)^2}{2} + e$.

PROBLEMA 2

Calculați

- a) $\int_{-2}^2 x^{2025} \sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} dx$
- b) $\int_{-2025}^{2025} \sqrt[3]{x^3 + x} dx$

PROBLEMA 3

Se consideră mulțimea $G = (2025; \infty)$, pe care se definește $a \Delta b = ab - 2025a - 2025b + 2025^2 + 2025$ cu $a, b \in G$.

- a) Arătați că pentru orice $a, b \in G$ avem $a \Delta b \in G$.
- b) Arătați că (G, Δ) este grup abelian.
- c) Determinați numerele reale $x, y \in G$ astfel încât $\lg x \Delta \lg y = \lg x$
- a) Demonstrați că funcția $f: (2025; \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(x - 2025)$ este un izomorfism între grupurile (G, Δ) și $(\mathbb{R}, +)$.
- b) Determinați $m, n \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ astfel încât $m \Delta n \in \mathbb{N}$

PROBLEMA 4

Fie mulțimea $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, pe care se definește legea de compoziție „ \circ ” prin:

$$(a, b) \circ (m, n) = (am, an + b)$$

- a) Arătați că legea este asociativă
- b) Determinați elementul neutru și elementele simetrizabile.
- c) Aflați două elemente (a, b) și (m, n) din G pentru care $(a, b) \circ (m, n) \neq (m, n) \circ (a, b)$
- d) Determinați $x \in G$, astfel încât $(2^x, 2 \cdot 2^x) \circ (2, 4 \cdot 2^x) = (1, 2)$