



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 09.02.2013

Clasa a X-a

Barem de corectare

Problema 1

Condiții de existență $x \in (27, +\infty)$

(1 p)

$$\log_{\frac{1}{3}}(\sqrt[3]{x}-3) = a \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^a = \sqrt[3]{x}-3 \quad (1)$$

$$\text{și } \lg(\sqrt[3]{x}+4) = b \Rightarrow 10^b = \sqrt[3]{x}+4 \quad (2).$$

$$\text{Din (1) și (2)} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^a - 10^b = -7 \quad (3) \quad (1 \text{ p})$$

$$\text{Cu notațiile făcute, ecuația din enunț devine: } \left(\frac{1}{10}\right)^a - 3^b = 7 \quad (4)$$

$$\text{Adunând relațiile (3) și (4) se obține: } \left(\frac{1}{3}\right)^a - 3^b + \left(\frac{1}{10}\right)^a - 10^b = 0 \Leftrightarrow (3^{-a}-3^b) + (10^{-a}-10^b) = 0. \quad (1 \text{ p})$$

$$\text{Dacă } -a < b, 3^{-a} < 3^b, 10^{-a} < 10^b \text{ și } (3^{-a}-3^b) + (10^{-a}-10^b) < 0 \quad (1 \text{ p})$$

$$\text{Dacă } -a > b, 3^{-a} > 3^b, 10^{-a} > 10^b \text{ și } (3^{-a}-3^b) + (10^{-a}-10^b) > 0 \quad (1 \text{ p})$$

$$\text{Deci } -a = b. \text{ Ecuația (4) devine: } \left(\frac{1}{10}\right)^{-b} - 3^b = 7 \text{ sau } 10^b - 3^b = 7.$$

Se observă că $b=1$ este soluție. (1 p)

$$10^b - 3^b = 7 \Rightarrow 7 + 3^b = 10^b \Rightarrow 7 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^b + \left(\frac{3}{10}\right)^b = 1$$

Funcția $f: (\lg 7, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, $f(b) = 7 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^b + \left(\frac{3}{10}\right)^b$ este strict descrescătoare, deci injectivă și ecuația

$f(b) = 1$ va avea soluția unică $b=1$.

$$\text{Pentru } b=1 \text{ avem } \sqrt[3]{x} = 10^b - 4 = 10 - 4 = 6, x = 6^3 = 216 \in (27, +\infty) \quad (1 \text{ p})$$



Problema 2. $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$ și $z = \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{i}{2} = \cos \frac{\pi}{6} \pm i \sin \frac{\pi}{6}$ (2 p)

$$\frac{1}{z} = \cos \frac{\pi}{6} \mp i \sin \frac{\pi}{6} \quad (2 \text{ p})$$

$$z^{2013} + \frac{1}{z^{2013}} = \cos \frac{2013\pi}{6} \pm i \sin \frac{2013\pi}{6} + \cos \frac{2013\pi}{6} \mp i \sin \frac{2013\pi}{6} = 2\cos \frac{2013\pi}{6} \quad (2 \text{ p})$$

În concluzie $z^{2013} + \frac{1}{z^{2013}} = 0$ (1 p)

Problema 3

Notăm $x = \log_a b$, $y = \log_b c$, $z = \log_c a$, de unde obținem că $x, y, z > 0$ și $xyz = 1$ (2p)

$$\frac{1}{2 + \log_a b} + \frac{1}{2 + \log_b c} + \frac{1}{2 + \log_c a} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2+x} + \frac{1}{2+y} + \frac{1}{2+z} \leq 1 \Leftrightarrow xy + yz + xz \geq 3 \quad (3p)$$

Ultima inegalitate se poate demonstra cu inegalitatea mediilor. (2p)

Problema 4

$x=1$ soluție a ecuației (1 p)

$$\left(\frac{2}{10}\right)^x + \left(\frac{3}{10}\right)^x + \left(\frac{5}{10}\right)^x = 1 \quad \left(\frac{1}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{10}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x = 1 \quad (1 \text{ p})$$

Funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{10}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x$ este strict descrescătoare, deci injectivă (3p)

Rezultă că $x=1$ este soluție unică pentru ecuația $f(x)=1$ (2p)

Notă: a) Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte.
b) Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.