



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 09.02.2013

Clasa a XI-a

Barem de corectare

Problema 1

Înlocuind pe n în relația de recurență obținem :

$$a_2 = \frac{1}{3}a_1 + 2$$

$$a_3 = \frac{1}{3}a_2 + 2$$

$$a_4 = \frac{1}{3}a_3 + 2$$

...

$$a_n = \frac{1}{3}a_{n-1} + 2. \text{ (2p)}$$

Înmulțim relațiile anterioare cu $1, 3, 3^2, \dots$, respectiv 3^{n-2} și le adunăm. Obținem :

$$3^{n-2}a_n = \frac{1}{3} + 2(1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-2}). \text{ (2p)}$$

Efectuăm calculele și în final obținem $a_n = 3 - \frac{2}{3^{n-1}} \forall n \in \mathbb{N}^*. \text{ (2p)}$

Ca urmare limita șirului este 3. **(1p)**

Problema 2

a) Evident $A^k B = B A^k \forall k \in \mathbb{N}^* \text{ (1)(1p)}$

Inducție matematică după $p \in \mathbb{N}^* : p=1$ evident

Dacă $(AB)^k = A^k B^k$ atunci $(AB)^{k+1} = (AB)(AB)^k = A B A^k B^k. \text{ (1p)}$

Folosind relația (1) rezultă $(AB)^{k+1} = A A^k B B^k = A^{k+1} B^{k+1}. \text{ (2p)}$

b) Din ipoteză rezultă $A^{2013} B = O_n. \text{ (1p)}$

Din a) avem $(AB)^{2013} = A^{2013} B^{2013} =$ **(1p)**
 $= A^{2013} B B^{2012} = O_n. \text{ (1p)}$



Problema 3

Din ipoteză rezultă $A^2 B^2 = I_n$, $A^2 B = A$, $AB^2 = B$. (1p)

Ca urmare $(A^2 + A + I_n)(B^2 + B + I_n) = A^2 + B^2 + 2A + 2B + 3I_n$. (2p)

$$\det(A^2 + B^2 + 2A + 2B + 3I_n) = \det(A^2 + A + I_n) \cdot \det(B^2 + B + I_n) \quad (1) \quad (1p)$$

$$\text{Știm că } \det(A^2 + A + I_n) = \det\left[\left(A + \frac{1}{2}I_n\right)^2 + \frac{3}{4}I_n\right] =$$

$$= \det\left(A + \frac{1}{2}I_n + i\frac{\sqrt{3}}{2}I_n\right) \cdot \overline{\det\left(A + \frac{1}{2}I_n + i\frac{\sqrt{3}}{2}I_n\right)} =$$

$$= \left|\det\left(A + \frac{1}{2}I_n + i\frac{\sqrt{3}}{2}I_n\right)\right|^2 \geq 0 \quad (2) \quad (2p)$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă concluzia. (1p)

Problema 4

a) f neconstantă $\Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}$ cu $f(a) \neq f(b)$

Alegem șirurile $x_n = a + nT$, $y_n = b + nT$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, unde $T > 0$ este perioada lui f (1p)

Avem $x_n \rightarrow \infty$, $f(x_n) = f(a) \rightarrow f(a)$

$y_n \rightarrow \infty$, $f(y_n) = f(b) \rightarrow f(b)$ (1p)

Deci nu există $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. (1p)

b) Fie $T_1 > 0$ și T_2 perioade pentru f, respectiv g

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f(x+T_2) - f(x) &= f(x+T_2+nT_1) - g(x+T_2+nT_1) + g(x+T_2+nT_1) - f(x+nT_1) = \\ &= [f(x+T_2+nT_1) - g(x+T_2+nT_1)] + [g(x+nT_1) - f(x+nT_1)] \end{aligned} \quad (2p)$$

Trecând la limită pentru $n \rightarrow \infty$ și folosind ipoteza obținem $f(x+T_2) - f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (1p)

În concluzie f și g au aceeași perioadă și conform punctului a) $\Rightarrow f(x) - g(x) = \text{constant} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. (1p)

Notă: a) Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte.

b) Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.