



## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 09.02.2013

### Clasa a XII-a

#### Barem de corectare

##### Problema 1

a) Considerăm  $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - \ln(x+1)$ ,  $f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1}$  deci  $x=0$  punct de minim

$$\text{global} \Rightarrow f(x) \geq f(0) = 0 \quad \forall x \in (-1, +\infty) \quad (3p)$$

b) Din a) rezultă  $\ln(\lg x) \leq \lg(x) - 1 \quad (1p)$

$$\Rightarrow \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \ln(\lg x) dx \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (\lg(x) - 1) dx = -\ln|\cos x| \left\{ \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{12} \right. \quad (3p)$$

##### Problema 2

$$(G, \cdot) \simeq (\mathbb{Z}_4, +) \Rightarrow |G|=4 \quad (1p)$$

Dacă  $G = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  și  $x \in G$  atunci  $G_x = \{xx_1, xx_2, xx_3, xx_4\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} = G \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^4(x_1 x_2 x_3 x_4) = x_1 x_2 x_3 x_4 \quad (2p)$$

$$(G, \cdot) \text{ grup} \Rightarrow 0 \notin G \Rightarrow x^4 = 1, \forall x \in G \Rightarrow G = \{1, -1, i, -i\} \quad (1p)$$

Stabilirea izomorfismului (2p)

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x-1)(x+1)(x-i)(x+i) = x^4 - 1 \Rightarrow a=b=c=0, d=-1 \quad (1p)$$

##### Problema 3

$$\int \ln(\lg x) dx = x \ln(\lg x) - \int \frac{x}{\sin x \cos x} dx \quad (2p)$$

$$\text{Considerăm : } \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sin x \cos x} & , x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$$

Funcția  $g$  este continuă, deci există  $G$  primitivă lui  $g$  și  $\lim_{x \rightarrow 0} G(x) = G(0) \in \mathbb{R} \quad (2p)$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(\lg x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x \lg x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0 \quad (2p)$$

$$\text{Rezultă că } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} F(x) = 0 - G(0) + c \in \mathbb{R}. \quad (1p)$$

##### Problema 4



Fie  $x, y \in G$ . Cum  $f$  surjectivă rezultă că există  $a, b \in G$  a. î.  $x=a^2, y=b^2$ .

$$\text{Deci } xy = a^2 b^2 = f(a)f(b) = f(ab) = (ab)^2 = [(ab)^{-1}]^{-2} = g((ab)^{-1}) = g(b^{-1} a^{-1}) = g(b^{-1})g(a^{-1}) = b^2 a^2 = yx$$

$\Rightarrow (G, \cdot)$  este grup abelian (2p)

$$e^{r^0} = e \Rightarrow e \in G_r \quad (1p)$$

$$x, y \in G_r \Rightarrow \exists m, n \in \mathbb{N} \text{ a. î. } x^{r^n} = e \text{ și } x^{r^m} = e$$

$$\text{Cum } (G, \cdot) \text{ abelian, rezultă } (xy)^{r^{m+n}} = (x^{r^n})^{r^m} (y^{r^m})^{r^n} = e \cdot e = e. \text{ Deci } xy \in G_r \quad (2p)$$

$$x \in G_r \text{ rezultă } \exists n \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } x^{r^n} = e \Rightarrow (x^{-1})^{r^n} = (x^{r^n})^{-1} = e^{-1} = e$$

$$\Rightarrow x^{-1} \in G_r \text{ . deci } G_r \text{ subgrup} \quad (2p)$$

**Notă:** a) Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte.

b) Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.