



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 09.02.2013

Clasa a VII-a

Barem de corectare

Problema 1

a)

$$A = \left(\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{\sqrt{4}}{5} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \dots + \left(\frac{\sqrt{2012}}{2013} - \frac{1}{\sqrt{2012}}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{5\sqrt{4}} - \dots - \frac{1}{2013\sqrt{2012}},$$

$$B = \left(\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{4\sqrt{2}}{3}\right) + \left(\frac{5}{\sqrt{4}} - \frac{6\sqrt{4}}{5}\right) + \dots + \left(\frac{2013}{\sqrt{2012}} - \frac{2014\sqrt{2012}}{2013}\right) = \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{5\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{2013\sqrt{2012}}$$

(2 p)

Deci $A = -B$ (1 p), de unde rezultă $|A + x| = |-B + x| = |B - x|$. (1 p)

b) Din $|x - 1| + |x - 2| + \dots + |x - 2012| \geq 0$ rezultă $x - 2013 \geq 0$. (1 p)

Ecuția se scrie sub forma $x - 1 + x - 2 + \dots + x - 2012 = 2013x - 2013^2$ (1 p) și are soluția $x = 2013 \cdot 1007$ (1 p).

Problema 2

a) Din inegalitățile $n(n-1) < n^2 < n(n+1)$ rezultă concluzia. (2 p)

b) Au loc inegalitățile $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ (2 p). Obținem

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{101} < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{1} - \frac{1}{100} \quad (2 \text{ p}). \text{ Rezultă } \frac{9}{202} < \frac{a}{11} < \frac{9}{100} \text{ de unde obținem concluzia. (1 p)}$$

Problema 3

a) Patrulaterul $ABCD$ fiind ortodiagonal, avem $S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2} = 15,6 \text{ cm}^2$. (3 p)

b) Avem $m(\angle EAC) = 90^\circ$. (2 p) Observăm că $ADBE$ este paralelogram deci $AE = BD$. (1 p) Obținem $S_{AEC} = \frac{AE \cdot AC}{2} = 15,6 \text{ cm}^2$. (1 p)

Problema 4

" \Rightarrow " Din $BMCN$ paralelogram rezultă $MC \parallel BE, BC$ secantă deci $\angle MCB \equiv \angle CBN$. (1 p)

Din $MC \parallel BE, AE$ secantă rezultă $\angle ACM \equiv \angle AEB$. (1 p) Deci $\triangle BCE$ este isoscel, de unde $[BC] \equiv [CE]$. (1 p)



" \Leftarrow " Deoarece triunghiul BCD este isoscel și unghiul ABC este exterior triunghiului BCD, avem:

$$2 \cdot m(\angle ABM) = m(\angle ABC) = 2 \cdot m(\angle ADC) \Rightarrow BM \parallel CD. \text{ (2 p)}$$

Analog se arată că $MC \parallel EB$, deci MBNC este paralelogram (2p).

Notă: a) Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte.

b) Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.