



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 09.02.2013

Clasa a VIII-a

Barem de corectare

Problema 1

a) Scrie expresia sub forma $E(x) = \frac{1}{(x-2012)^2 + 2012}$ (1p)

$E(x)$, fiind pozitivă, ia valoarea maximă dacă numitorul ia valoarea minimă; (1p)

$$(x-2012)^2=0 \Rightarrow x=2012 \quad (1p)$$

$$E(2012) = \frac{1}{2012} \text{ este valoarea maximă a expresiei } (1p)$$

b)

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{x}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} = \frac{1}{1+x+xy} + \frac{x}{x+xy+xyz} + \frac{1}{1+z+zx} = \quad (1p)$$

$$\frac{1+x}{1+x+xy} + \frac{1}{1+z+zx} = \quad (1p)$$

$$\frac{z+xz}{z+xz+xyz} + \frac{1}{1+z+zx} = \frac{z+xz+1}{z+xz+xyz} = 1 \quad (1p)$$

Problema 2

a) $a + \frac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{a^2+1}{a} \geq \frac{2a}{a} \Leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0$ (adevărat) \Rightarrow c.c.t.d. (2p)

Egalitate avem dacă $a = 1$ (1p)

b) Din a) $\Rightarrow \frac{CA}{CB} + \frac{CB}{CA} + \frac{DA}{DB} + \frac{DB}{DA} \geq 4$. Egalitate avem doar dacă $\frac{CA}{CB} = 1$ și $\frac{DA}{DB} = 1$. (1p)

Deci $CA=CB$ și $DA=DB$. (1p)

În $\triangle CAB$ -isoscel, mediana CM este și înălțime $\Rightarrow CM \perp AB$

În $\triangle DAB$ -isoscel, mediana DM este și înălțime $\Rightarrow DM \perp AB$ (1p)

Deci $AB \perp (CMD) \Rightarrow AB \perp CD$ pentru A, B, C, D necoplanare și $AB \perp CD$ pentru A, B, C, D coplanare. (1p)

Problema 3

a) Fie $AD \perp BC$. Conform teoremei celor trei perpendiculare $MD \perp BC$ și $A_{MBC} = \frac{BC \cdot MD}{2}$. Dar $BC=50$

cm din triunghiul dreptunghic ABC , iar $[MD]$ este ipotenuză în triunghiul dreptunghic ADM , în care

$$AD = \frac{30 \cdot 40}{50} = 24 \text{ cm}. \text{ Deci } MD = 26 \text{ cm}. A_{MBC} = 650 \text{ cm}^2. \quad (4p)$$

b) Din $AD \perp BC$ și $MD \perp BC$ rezultă $(MBC) \perp (AMD)$, deoarece (MBC) conține pe $BC \perp (AMD)$. Înălțimea

corespunzătoare ipotenuzei în triunghiul AMD este perpendiculară pe planul MBC și are lungimea $\frac{120}{13}$ cm. (3p)



Problema 4

Resturile posibile la împărțirea celor $2^{2013}+2$ numere prime la 2^{2014} sunt $1;2;3;5;7;9;\dots; 2^{2014}-1$, în total $2^{2013}+1$ valori **(3p)**

Împărțind cele $2^{2013}+2$ la 2^{2014} se obțin $2^{2013}+2$ resturi **(1p)**

Conform principiului cutiei cel puțin două dintre resturi sunt egale **(2p)**

Diferența numerelor care dau același rest la împărțirea prin 2^{2014} se divide cu 2^{2014} **(1p)**

Notă: a) Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte.
b) Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.