



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 09.02.2013

Clasa a XII-a

Problema 1

Să se arate că:

a) $\ln(x+1) \leq x, \forall x > -1;$

b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \ln(\operatorname{tg} x) dx \leq \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{12}.$

Problema 2

Fie $G = \{x \in \mathbb{C} \mid x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0\}$. Determinați $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ astfel încât (G, \cdot) să fie grup izomorf cu $(\mathbb{Z}_4, +)$.

Problema 3

Considerăm $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(\operatorname{tg} x)$ și F o primitivă a sa. Să se arate că există $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} F(x) \in \mathbb{R}$

Problema 4

Fie (G, \cdot) un grup cu proprietatea că $f, g : G \rightarrow G, f(x) = x^2, g(x) = x^{-2}$ sunt morfisme surjective. Să se arate că pentru $r \in \mathbb{N}$ fixat, mulțimea $G_r = \{x \in G \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } x^{r^n} = e\}$ este subgrup al lui G .

Notă: a) Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
b) Toate problemele sunt obligatorii.
c) Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.