



## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

*Etapă locală - 09.02.2013*

**Clasa a IX-a**

### Problema 1

1. Demonstrați că pentru  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ ,  $1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+n} + \frac{2}{n+1} \in \mathbf{N}$ .

2. Demonstrați că pentru  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \in \mathbf{N}$ .

### Problema 2

Dacă  $x, y$  și  $z$  sunt numere reale strict pozitive, arătați că următoarele inegalități sunt adevărate:

a)  $\frac{x+z}{(y+z)^2} + \frac{y+z}{(x+z)^2} \geq \frac{1}{x+z} + \frac{1}{y+z}.$

b)  $\frac{x+2y+z}{(x+z)^2} + \frac{x+y+2z}{(x+y)^2} + \frac{2x+y+z}{(y+z)^2} \geq 2 \left( \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \right).$

### Problema 3

Fie ABC un triunghi oarecare și considerăm pe prelungirile laturilor AB, BC și CA punctele E, F și G ( $B \in [AE], C \in [BF], A \in [CG]$ ), astfel încât să avem  $\frac{AB}{BE} = \frac{BC}{CF} = \frac{CA}{AG} = k$ . Fie M, N, K mijloacele segmentelor EF, FG și GE. Demonstrați că centrele de greutate a triunghiurilor ABC și MNK coincid.

### Problema 4

Se dă un șir strict crescător de numere naturale pare. Arătați că în intervalul  $[s_n; s_{n+1}]$  există cel puțin un pătrat perfect, unde  $s_n$  este suma primilor  $n$  termeni ai șirului dat și  $n > 0$ .

**Notă:** a) Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.  
b) Toate problemele sunt obligatorii.  
c) Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.