



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 09.02.2013

XI. Osztály

1.Feladat

Határozzátok meg az $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$ és $a_1 = 1$, rekurziós képlettel értelmezett sorozat határértékét.

2.Feladat

Legyen $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ és $B = A^3 + A^2 + A + I_n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

- Mutassátok ki, hogy $(AB)^p = A^p B^p \quad \forall p \in \mathbb{N}^*$;
- Ha $A^{2013} + A^{2014} + A^{2015} + A^{2016} = O_n$ akkor $(AB)^{2013} = O_n$.

3.Feladat

Ha $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ úgy, hogy $AB = I_n$, akkor mutassátok ki, hogy

$$\det(A^2 + B^2 + 2A + 2B + 3I_n) \geq 0.$$

4.Feladat

- Ha az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy periodikus és nem állandó függvény, akkor mutassátok ki, hogy nem létezik a $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ határérték.
- Az $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodikus függvények, teljesítik a következő feltételt: $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - g(x)] = 0$.
Mutassátok ki, hogy a két függvény periódusa egyenlő és $f(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Notă: Notă: : a)Munkaidő 3 óra.
b) Minden feladat kötelező.
c) Minden feladatot 0-tól 7-ig pontoznak..