



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 09.02.2013

XII. Osztály

1. Feladat

Mutassátok ki, hogy:

a) $\ln(x+1) \leq x, \forall x > -1;$

b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \ln(\operatorname{tg} x) dx \leq \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{12}.$

2. Feladat

Adott $G = \{x \in \mathbb{C} \mid x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0\}$. Határozzátok meg $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ úgy, hogy (G, \cdot) izomorf legyen a $(\mathbb{Z}_4, +)$ csoporttal.

3. Feladat

Adott az $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(\operatorname{tg} x)$ függvény, amelynek F a primitív függvénye. Igazoljátok, hogy létezik $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} F(x) \in \mathbb{R}$

4. Feladat

Adott a (G, \cdot) csoport és az $f, g : G \rightarrow G, f(x) = x^2, g(x) = x^{-2}$ szürjektív morfizmusok. Igazoljátok, hogy egy rögzített $r \in \mathbb{N}$ esetén, a $G_r = \{x \in G \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ úgy, hogy } x^{r^n} = e\}$ részcsoportha a G csoportnak.

Megjegyzés : a) Munkaidő 3 óra.
b) Minden feladat kötelező.
c) Minden feladatot 0-tól 7-ig pontoznak..