

PRINCIPIUL LUI DIRICHLET

Prof. Chișiu Gabriela

Prof. Rusu Carmen

Pentru a putea parcurge aplicațiile vom avea nevoie să prezentăm principiul lui Dirichlet și interpretarea acestuia.

Principiul lui Dirichlet este un concept fundamental în matematică, numit după matematicianul german Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet. Acest principiu se poate formula astfel: ***dacă repartizăm $(nk + 1)$ obiecte în k cutii, atunci în cel puțin o cutie vor fi cel puțin $(n + 1)$ obiecte.*** Putem observa că în enunț este pusă în evidență existența unui număr minim de obiecte repartizate în aceeași cutie.

În continuare sunt prezentate câteva probleme a căror rezolvare se face utilizând acest principiu.

1. Dintre 13 de persoane, să se arate că există cel puțin două care își serbează ziua în aceeași lună a anului.

Soluție. Un an are 12 luni. Considerăm că avem 12 cutii etichetate cu lunile anului și 13 bilețele cu numele persoanelor. Dacă distribuim în fiecare cutie câte un nume de persoană, atunci unul rămâne de pus într-o cutie în care deja avem un bilețel. Aceasta înseamnă că avem cel puțin două persoane sunt născute în aceeași lună a anului.

2. Într-o pădure sunt 700000 de stejari. Fiecare stejar are cel mult 400000 de frunze. Să se demonstreze că există cel puțin doi stejari cu același număr de frunze.

Soluție. Presupunem contrariul, adică presupunem că nu există doi stejari din această pădure cu un număr egal de frunze. Atunci cel mult un stejar (un stejar sau nici unul) va avea o frunză. La fel, cel mult un stejar va avea două frunze, ș.a.m.d, cel mult un stejar va avea 399999, cel mult un stejar va avea 400000 de frunze. Deci, cel mult 400000 au un număr de între 1 și 400000 de frunze. Cum în total sunt 700000 de stejari, și deoarece fiecare stejar are cel mult 400000 de frunze, rezultă că vor fi cel puțin doi stejari cu același număr de frunze .

Observație. Se observă cu ușurință, că soluția nu ține esențial de numerele concrete 700000 (numărul de copaci) și 400000 (numărul maximal de frunze). A fost utilizat faptul că 700000 este strict mai mare decât 400000. În demonstrație s-a presupus că nu există stejar fără frunze, deși problema și demonstrația este adevărată și în acest caz.

Acum putem reformula principiul lui Dirichlet:

Fie în n cutii sunt plasate k obiecte. Dacă obiecte sunt mai multe decât cutii ($k > n$), atunci există cel puțin o cutie care conține cel puțin două obiecte.

Este important de menționat că nu se ține cont care cutie conține cel puțin două obiecte. La fel nu este important câte obiecte sunt în această cutie, precum și câte astfel de cutii avem. Este important că există cel puțin o cutie cu cel puțin două obiecte (două sau mai multe).

Revenim din nou la problema 2. Să rezolvăm această problemă utilizând *principiul lui Dirichlet*. Presupunem că avem 400000 de cutii numerotate respectiv $1, 2, 3, \dots, 400000$. Plasăm (virtual) în aceste cutii 700000 de stejari în modul următor: în cutia cu indicile s se repartizează stejarii cu s . Deoarece stejarii, adică "obiecte", sunt mai multe decât cutiile, rezultă că cel puțin o cutie va conține cel puțin două obiecte, adică cel puțin doi stejari. Deoarece în aceeași cutie sunt stejari cu număr egal de frunze, deducem că există cel puțin doi stejari cu lași număr de frunze.

3. La un turneu de tenis au participat $n \geq 2$ jucători. Să se demonstreze că în orice moment al turneului dinaintea ultimei runde, cel puțin doi jucători au lași număr de victorii.

Soluție. În orice moment al turneului dinaintea ultimei runde, fiecare jucător a jucat maximum $n - 2$ partide și a putut obține $0, 1, 2, \dots, n - 2$ victorii, deci în total $n - 1$ posibilități (cutii). Fiindcă la turneu au participat n jucători rezultă că cel puțin doi jucători au lași număr de victorii înaintea ultimei runde.

4. Din cei 25 de elevi ai unei clase, 14 au participat la olimpiada de limba română, 15 la olimpiada de matematică, 16 la olimpiada de chimie, 17 la olimpiada de fizică. Să se arate că cel puțin 13 elevi au participat la toate cele patru olimpiade.

Soluție. Presupunem că nici un elev nu a participat la toate cele patru olimpiade, deci fiecare a participat la cel mult trei olimpiade. Dacă fiecare elev a participat la trei olimpiade. Atunci la cele patru olimpiade au participat $25 \cdot 3 = 75$ (elevi). Dar numărul elevilor participanți la olimpiade este $14 + 15 + 16 + 17 = 62$. Avem în plus 13 de elevi. Deci cel puțin 13 elevi au participat la toate cele patru olimpiade.

5. Într-o școală sunt 1500 de elevi. Să se arate că există o zi în care cel puțin 5 elevi își sărbătoresc ziua de naștere.

Soluție. Un an bisect are 366 zile și $1500 = 366 \cdot 4 + 36$, deci conform *principiului lui Dirichlet* există o zi în care s-au născut cel puțin $4 + 1 = 5$ elevi. Cu atât mai mult dacă anul nu este bisect.

6. Să se demonstreze că dintre trei numere naturale oarecare se pot alege două a căror sumă sau diferență este divizibilă prin 2.

Soluție. Orice număr natural este de forma $2k$ sau $2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$ (două cutii). Cum avem trei numere și doar două cutii rezultă că cel puțin două dintre numere vor avea aceeași paritate. Deci suma sau diferența acestora este un număr par (divizibil cu 2).

7. Arătați că în orice mulțime formată din 5 numere naturale există două a căror diferență este multiplu de 4.

Soluție. La împărțirea unui număr cu 4 obținem unul din resturile 0, 1, 2, 3 (deci patru cutii). Fiindcă avem 5 numere (5 obiecte și 4 cutii) rezultă că cel puțin două numere vor da lași rest la împărțirea cu 4. Ele sunt de forma $x = 4k + r$ și $y = 4l + r$. Atunci diferența lor este $x - y = 4(k - l)$, adică un număr divizibil cu 4.

8. Să se demonstreze, că printre orice 2024 numere întregi există două numere care dau același rest la împărțirea cu 2023.

Soluție. Considerăm 2023 cutii etichetate cu numerele 0, 1, 2, ..., 2022, care reprezintă resturile împărțirii la 2023. Repatizăm în aceste cutii 2023 de numere întregi arbitrare, în dependență de restul împărțirii la 2023, adică în aceeași cutie se plasează numerele cu același rest la împărțirea la 2023. Cum numere ("obiecte") sunt mai multe decât cutii, conform *principiului lui Dirichlet*, există o cutie ce conține mai mult decât un obiect. Deci, există (cel puțin) două numere plasate în aceeași cutie. Prin urmare, există două numere cu același rest la împărțirea prin 2023. Atunci, diferența lor este divizibilă cu 2023.

Generalizare: Fie $n + 1$ numere întregi. Să se arate că există cel puțin două numere, din cele date, care au diferența divizibilă cu n (care dau lași rest la împărțirea prin n).

9. Arătați că, printre nouă numere naturale prime mai mari decât 5, există întotdeauna două a căror diferență se divide cu 30.

Soluție. Dacă printre cele nouă numere naturale două sunt egale, atunci diferența lor este 0, deci divizibilă cu 30. Dacă numerele sunt distincte două câte două, din $n = 30q + r$, $r \in \mathbb{N}$, $0 \leq r \leq 29$, n număr prim diferit de 2, r poate fi numai 1, 7, 11, 17, 19, 23, 29. Așadar avem 9 numere care dau 8 resturi distincte, de unde: două numere dau același rest, iar diferența lor este multiplu de 30.

10. Să se demonstreze, că printre orice șase numere întregi există două numere a căror diferență este divizibilă prin 5.

Soluție. Considerăm 5 cutii etichetate cu numerele 0, 1, 2, 3, 4, care reprezintă resturile împărțirii la 5. Repatizăm în aceste cutii șase numere întregi arbitrare, în dependență de restul împărțirii la 5, adică în aceeași cutie se plasează numerele cu același rest la împărțirea la 5. Cum numere ("obiecte") sunt mai multe decât cutii, conform *principiului lui Dirichlet*, există o cutie ce conține mai mult decât un obiect. Deci, există (cel puțin) două numere plasate în aceeași cutie. Prin urmare, există două numere cu același rest la împărțirea prin 5. Atunci, diferența lor este divizibilă cu 5.

11. Arătați că în orice mulțime formată din 5 numere naturale există două a căror diferență este divizibilă cu 4.

Soluție. La împărțirea unui număr cu 4 obținem unul din resturile 0, 1, 2, 3 (deci patru cutii). Fiindcă avem 5 numere (5 obiecte și 4 cutii) rezultă că cel puțin două numere vor da același rest la împărțirea cu 4. Ele sunt de forma $x = 4k + r$ și $y = 4l + r$. Atunci diferența lor este $x - y = 4(k - l)$, adică un număr divizibil cu 4.

12. Să se arate că oricum am alege 7 pătrate perfecte (distincte) există cel puțin două a căror diferență se divide cu 10.

Soluție. Dacă a este numărul a cărui pătrat este a^2 atunci la împărțirea cu 10 a lui a obținem resturile: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Atunci a^2 , la împărțirea cu 10 va da unul din resturile: 0, 1, 4, 5, 6, 9. Fiindcă avem 7 pătrate perfecte și numai resturile 0, 1, 4, 5, 6, 9 conform *principiului cutiei* rezultă că cel puțin două pătrate perfecte dau același rest la împărțirea cu 10, deci diferența lor se divide cu 10.

Pentru exersare, iată câteva probleme cu principiul cutiei, date la olimpiade și concursuri:

13. Punctele unui cerc se colorează cu verde sau galben astfel încât orice triunghi echilateral înscris în cerc să aibă exact două vârfuri colorate în galben. Să se arate că există un pătrat înscris în cerc care are cel puțin trei vârfuri colorate în galben. (*Olimpiada județeană 2007, clasa a VIII-a*)

14. a) Arătați că din oricare 3 numere naturale, putem alege două, astfel încât suma lor să fie un număr par.

b) Fiind date 7 numere naturale, arătați că putem alege 4 dintre ele astfel încât suma lor să fie divizibilă cu 4. (*Concursul "Florica T. Câmpan" 2006, etapa interjudețeană, clasa a VII-a*)

15. Să se arate că oricum am alege cinci numere naturale, există două dintre ele care au suma sau diferența divizibile cu 7. (*Olimpiada locală Galați 1995, clasa a VI-a*)

16. Să se arate că din oricare cinci numere naturale prime, mai mari decât 2, putem alege două astfel încât diferența lor să fie divizibilă cu 8. (*Olimpiada locală Alba 1996, cls. a VI-a*)

17. Demonstrați că din oricare 4 numere naturale diferite putem alege două astfel încât suma cifrelor diferenței lor să fie multiplu de 3. (*Olimpiada județeană Argeș 2006, clasa a V-a*)

18. Pe un satelit sferic de rază 2 sunt amplasate 9 stații de emisie-recepție. Demonstrați că există două stații pe satelit aflate la o distanță ce nu depășește π . (*Concursul "Florica T. Câmpan", 2002*).

19. Să se arate că oricum am alege 51 de numere naturale distincte între 1 și 100, există printre ele două a, b astfel încât $a \mid b$. (*Concursul "Florica T. Câmpan", 2004*).

BIBLIOGRAFIE

- [1] Vasile Pop, Viorel Lupșor, *Matematica pentru grupele de performanță, clasa a V-a*, Ed. Dacia Educațional, 2004
- [2] Vasile Pop, Dana Heuberger, *Matematică de excelență*, Ed. Paralela 45, 2014
- [3] Colecția *Gazeta Matematică*
- [4] Arthur Engel, *Probleme de matematică - strategii de rezolvare*, Ed. GIL, 2006